XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

**Решения заданий регионального этапа, 1 день**

**1.** *Как без остатка разрезать клетчатый квадрат размером 8х8 клеточек на 10 клетчатых прямоугольников, чтобы все прямоугольники имели различные площади? Все разрезы должны проходить по границам клеточек.* (И. Рубанов)

**Решение**. Например, так, как показано на рисунке справа.

**2.** *Учитель придумал ребус, заменив в примере a+b = c на сложение двух натуральных чисел цифры буквами: одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными. (например, если a = 23, а b = 528, то c = 551, и получился, с точностью до выбора букв, ребус АБ+ВАГ = ВВД). Оказалось, что по получившемуся ребусу однозначно восстанавливается исходный пример. Найдите наименьшее возможное значение суммы c.* (И. Богданов)

**Ответ**. 10. **Решение**. Если ребус имеет вид А+Б = АВ, то А = 1, так как А+Б < 20, и Б = 9, так как иначе сумма А+Б ⎯ однозначное число. Таким образом, при *c* = 10 по ребусу может однозначно восстанавливаться исходный пример 1+9 = 10. Если же *c* < 10, то ребус имеет вид А+Б = В или А+А = Б. В первом случае нельзя определить, был ли это пример 1+2 = 3 или пример 1+3 = 4, а во втором — пример 1+1 = 2 или пример 2+2 = 4.

**3.** *В треугольнике ABC проведены биссектрисы BK и CL. На отрезке BK отмечена точка N так, что LN ∥ AC. Оказалось, что NK = LN. Найдите величину угла ABC*. (А. Кузнецов)

**Ответ**. 120°. **Решение**. В равнобедренном треугольнике *LNK* ∠*KLN* = ∠*LKN*. Кроме того, равны углы *KLN* и *LKA* как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых *LN* и *AC*. Таким образом, ∠*KLN* = ∠*LKA*, то есть луч *KL* ⎯ биссектриса угла *AKB*. Следовательно, лежащая на нём точка *L* равноудалена от прямых *KA* и *KB*. Кроме того, она равноудалена от прямых *CA = KA* и *CB*, так как лежит на биссектрисе угла *ACB*. Значит, точка *L* равноудалена от прямых *CB* и *KB*, и потому должна лежать на биссектрисе того из углов, образованных этими прямыми, в котором она содержится. Это угол *KBC*1, где *C*1 ⎯ точка на продолжении отрезка *CB* за точку *B*, а его биссектрисой должен быть луч *BL* = *BA*. Отсюда получаем, что ∠*ABC*1 = ∠*ABK* = ∠*CBK*. Так как эти три угла вместе составляют развёрнутый угол, то каждый из них равен 60°, откуда ∠*ABC* = ∠*ABK*+∠*CBK* = 120°.

**4.** *Числа 1, 2, ..., 1000 разбили на два множества по 500 чисел: красные k1, k2, ..., k500 и синие s1, s2, ..., s500. Докажите, что количество таких пар m и n,* *у которых разность km–sn дает остаток 7 при делении на 100, равно количеству таких пар m и n, у которых разность sn–km дает остаток 7 при делении на 100. Здесь рассматриваются* ***все*** *возможные разности, в том числе и отрицательные.*

*Напомним, что остатком от деления целого числа a на 100 называется разность между числом a и ближайшим числом, не большим a и делящимся на 100. Например, остаток от деления числа 2022 на 100 равен 2022–2000 = 22, а остаток от деления числа –11 на 100 равен –11–(–100) = 89.* (Е. Бакаев)

**Решение**. Выпишем на доске все числа от 1 до 1000, и будем проводить стрелку от числа *a* к числу *b*, если разность *a*−*b* дает остаток 7 при делении на 100. Тогда в каждое число будет входить 10 стрелок и из каждого числа будет выходить 10 стрелок. Значит, стрелок с синим началом столько же, сколько стрелок с синим концом. Удалим все стрелки, у которых как начало, так и конец синие. Тогда получится, что стрелок с синим началом и красным концом столько же, сколько стрелок с красным началом и синим концом, что и требовалось доказать.

**5.** *При каком наибольшем n существует выпуклый n-угольник, у которого длины диагоналей принимают не больше двух различных значений?* (И. Рубанов)

**Ответ**. При *n* = 7. **Решение**. *Пример*. Правильный семиугольник. У него диагонали ровно двух видов: соединяющие вершины через одну и через две. *Оценка*. Пусть *AB* ⎯ сторона выпуклого многоугольника *M*, у которого есть диагонали только двух возможных длин *x* и *y*. Тогда для всякой вершины *C*, не смежной с *A* и *B*, стороны *CA* и *CB* треугольника *ACB* могут равняться только *x* и *y*. Выбор длин этих сторон однозначно определяет вершину *C*, так как она должна лежать с той же стороны от прямой *AB*, что и весь многоугольник *M*. Но таких комбинаций сторон есть только четыре: *CA* = *CB* = *x*; *CA* = *CB* = *y*; *CA* = *x*, *CB* = *y*; *CA* = *y*, *CB* = *y*. При этом из двух первых комбинаций возможна только одна: иначе соответствующие вершины *C*1 и *C*2 многоугольника *M* лежали бы на серединном перпендикуляре к стороне *AB*, и та из них, которая ближе к *AB*, оказалась бы внутри треугольника с вершинами в *A*, *B* и другой из этих вершин, что противоречит выпуклости *M*. Таким образом, у многоугольника *M* не больше трёх вершин, не смежных с вершинами *A* и *B*, то есть всего у него не более 7 вершин.